

Effektive Abschätzungen für den Gitterrest gewisser ebener und dreidimensionaler Bereiche

Ekkehard Krätzel und Werner Georg Nowak (Wien)

Abstract. **Effective estimates for the lattice point discrepancy of certain planar and three-dimensional domains.** This paper provides estimates, with explicit constants, for the lattice point discrepancy of \mathbf{o} -symmetric ellipse discs and ellipsoids in \mathbb{R}^3 , as well as of three-dimensional convex bodies which are invariant under rotations around one coordinate axis and have a smooth boundary of finite nonzero Gaussian curvature throughout.

1. Einleitung. Das zentrale Problem der Theorie der Gitterpunkte in großen Bereichen (wie sie z.B. vom erstgenannten Verfasser in der Monographie [11] dargestellt wurde) besteht bekanntlich darin, für einen gegebenen Körper \mathcal{K} des \mathbb{R}^s , $s \geq 2$, und einen großen reellen Parameter t die Zahl $A_{\mathcal{K}}(t)$ der ganzzahligen Punkte im linear vergrößerten Bereich $t\mathcal{K}$ asymptotisch auszuwerten, insbesondere den Gitterrest

$$P_{\mathcal{K}}(t) = A_{\mathcal{K}}(t) - \text{vol}(\mathcal{K})t^s = \#(\mathbb{Z}^s \cap t\mathcal{K}) - \text{vol}(\mathcal{K})t^s$$

möglichst präzise abzuschätzen.

Unter der Voraussetzung, daß der Rand $\partial\mathcal{K}$ von \mathcal{K} hinreichend glatt und überall von beschränkter, nicht verschwindender Gaußscher Krümmung ist, bewiesen bereits J.G. Van der Corput [16] $P_{\mathcal{K}}(t) \ll t^{2/3}$ und E. Hlawka [9] $P_{\mathcal{K}}(t) \ll t^{s(s-1)/(s+1)}$ für $s \geq 3$. Die schärfsten bekannten Schranken lauten

$$P_{\mathcal{K}}(t) \ll \begin{cases} t^{131/208}(\log t)^{18637/8320} & \text{für } s = 2, \\ t^{63/43+\varepsilon} & \text{für } s = 3, \\ t^{40/17+\varepsilon} & \text{für } s = 4, \\ t^{s-2+(s+4)/(s^2+s+2)+\varepsilon} & \text{für } s \geq 5. \end{cases} \quad (1.1)$$

Sie stammen von M. Huxley [10] ($s = 2$) bzw. W. Müller [14] ($s \geq 3$). Im Spezialfall der Kugel ist für $s \geq 3$ Genaueres bekannt, nämlich

$$P(t) \ll \begin{cases} t^{21/16+\varepsilon} & \text{für } s = 3, \\ t^2(\log t)^{2/3} & \text{für } s = 4, \\ t^{s-2} & \text{für } s \geq 5. \end{cases} \quad (1.2)$$

Diese Abschätzungen stammen von D.R. Heath-Brown [8] (als Verbesserung früherer Ergebnisse von F. Chamizo und H. Iwaniec [4] sowie von I.M. Vinogradov [17]), bzw. von A. Walfisz [18]. Für ein allgemeines \mathbf{o} -symmetrisches Ellipsoid \mathcal{E} bewiesen Bentkus und Götze [1]

$$P_{\mathcal{E}}(t) \ll t^{s-2} \quad \text{für } s \geq 9. \quad (1.3)$$

Dies wurde von F. Götze [6] auf $s \geq 5$ erweitert. Für einen dreidimensionalen Rotationskörper (bezüglich einer Koordinatenachse) mit hinreichend glattem Rand von überall beschränkter, nicht verschwindender Gaußscher Krümmung zeigte F. Chamizo [3], schärfer als (1.1),

$$P_{\mathcal{K}}(t) \ll t^{11/8}. \quad (1.4)$$

2. Ziele der vorliegenden Arbeit. Die Verfasser wurden anlässlich von Vorträgen mehrfach gefragt, was (bei den auch hier berichteten Resultaten) über die in den \ll -Symbolen enthaltenen Konstanten ausgesagt werden könne. Diese Problematik wurde von den meisten Experten der Theorie bis dato sträflich vernachlässigt.⁽¹⁾ Aus dem Blickwinkel des allgemein interessierten Mathematikers sowie des Numerikers verdient Sie jedoch durchaus Beachtung.

Dabei liegt es allerdings nahe, sich mit effektiven Versionen der klassischen Schranken von Van der Corput bzw. Hlawka zu begnügen. In dieser Richtung wurde von E. Krätzel [12], Satz 5.12, für den Einheitskreis die Abschätzung

$$|P(t)| \leq 38 t^{2/3} + 704 t^{1/2} + 11 \quad (2.1)$$

gezeigt. Allgemeiner konnte er in [13] für einen ebenen Bereich \mathcal{B} mit glattem Rand von stetiger, beschränkter, nicht verschwindender Krümmung

$$|P_{\mathcal{B}}(t)| \leq 48 (r_{\max} t)^{2/3} + \left(703 \sqrt{r_{\max}} + \frac{3 r_{\max}}{5 \sqrt{r_{\min}}} \right) \sqrt{t} + 11 \quad (2.2)$$

beweisen, wobei r_{\max} , r_{\min} die Extremwerte des Krümmungsradius der Randkurve bezeichnen.

In dieser Arbeit soll die Thematik auf gewisse dreidimensionale Körper erweitert werden. Wir benützen zunächst (Abschnitt 3) die Poisson'sche Summenformel zusammen mit einer Glättungstechnik und Kenntnissen über die auftretenden Fourier-Transformierten, um für den Gitterrest der Kugel sowie eines allgemeinen \mathbf{o} -symmetrischen Ellipsoids im \mathbb{R}^3 Schranken mit effektiven Konstanten zu erhalten (Sätze 1A, 1B). Dieser Zugang liefert auch ein entsprechendes Resultat für die ebene Ellipsenscheibe (Satz 2). Mit ganz anderer Methodik, nämlich einer Anwendung des Van der Corput'schen Ideenkreises mittels Exponentialsummen und Bruchteilsummen (unter Einbeziehung der Kusmin-Landau'schen Abschätzung), wird sodann im 4. Abschnitt der Gitterrest eines dreidimensionalen Rotationskörpers mit glattem Rand von beschränkter, nicht verschwindender Gaußscher Krümmung behandelt (Satz 3).

⁽¹⁾ Als Ausnahme seien die bereits zitierten Arbeiten von Bentkus und Götze [1], [6] genannt. Die \ll -Konstante wird darin bis auf einen nur von s abhängenden Faktor mittels der minimalen und maximalen Hauptkrümmungsradien des Ellipsoids explizit angegeben.

3. Gitterpunkte in Kugeln, Ellipsoiden und Ellipsenscheiben.

Satz 1A. *Es sei*

$$A(t) = \#\{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^3 : \|\mathbf{m}\|_2 \leq t\}, \quad P(t) = A(t) - \frac{4\pi}{3}t^3,$$

dann gilt für $t \geq 10$ die Abschätzung

$$|P(t)| \leq 14t^{3/2} + 3.5t \log t + 12.9t + 0.53\sqrt{t} + 8.2 + \frac{2 \log t}{\sqrt{t}} + \frac{7.3}{\sqrt{t}} + \frac{0.36}{t} + \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Es sei dem Leser überlassen, die gegebene Schranke auf Kosten der Präzision beliebig zu vereinfachen.

Unser Beweis läßt sich prinzipiell in größerer Allgemeinheit durchführen, sodaß wir den Fall eines beliebigen dreidimensionalen Ellipsoids (in Mittelpunktslage) behandeln können.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sei $Q = Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A^t\mathbf{x}$ eine ternäre positiv definite quadratische Form mit Determinante $\det A = 1$, und $f = \sqrt{Q}$ die Distanzfunktion des Ellipsoids $\mathcal{E} = \mathcal{E}_f : Q(\mathbf{x}) \leq 1$.

Wir setzen $b := \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{15}}{8}} = 0.295\dots$, $c := 0.277$, und definieren für $t > 0$

$$\varepsilon := \frac{c}{\sqrt{t}}, \quad K := \frac{b}{\varepsilon}. \quad (3.1)$$

Ferner sei $Q^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A^{-1}t\mathbf{x}$ die inverse Form zu Q und entsprechend $g = \sqrt{Q^{-1}}$ die *Stützfunktion* von \mathcal{E} . Wir setzen

$$G_0 := \min_{\mathbf{o} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} g(\mathbf{k}), \quad G_1 := \max_{\mathbf{w} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3} g(\mathbf{w}) = \max g(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}), \quad (3.2)$$

und schließlich, für reelles $u \geq 0$,

$$a_g(u) := \frac{4\pi}{3}(u + G_1)^3 - 1. \quad (3.3)$$

Satz 1B. *Mit den vereinbarten Voraussetzungen und Bezeichnungen sei*

$$A_f(t) := \#(t\mathcal{E} \cap \mathbb{Z}^3), \quad P_f(t) := A_f(t) - \frac{4\pi}{3}t^3,$$

dann gilt für $t \geq G_0^2$

$$|P_f(t)| \leq \frac{4\pi}{3}((t + 2\varepsilon)^3 - t^3) + \max_{\pm} \overline{P}_f^*(t \pm 2\varepsilon)$$

mit

$$\overline{P}_f^*(R) := \frac{R}{\pi} \frac{a_g(K)}{K^2} + \frac{2R}{\pi} \int_{G_0}^K \frac{a_g(u)}{u^3} du + \frac{1}{2\pi^3 R} \int_{G_0}^{\infty} \frac{a_g(u)}{u^5} du + \sum_{j=6,8,10,12} F_j j \int_K^{\infty} \frac{a_g(u)}{u^{j+1}} du,$$

wobei $R := t \pm 2\varepsilon$ und

$$F_6 := \frac{9R}{16\pi^5\varepsilon^4}, \quad F_8 := \frac{9(\varepsilon^2 + 2R^2)}{128\pi^7\varepsilon^6R}, \quad F_{10} := \frac{9(2\varepsilon^2 + R^2)}{1024\pi^9\varepsilon^8R}, \quad F_{12} := \frac{9}{8192\pi^{11}\varepsilon^8R}.$$

Bemerkung. Diese Abschätzung erscheint auf den ersten Blick reichlich kompliziert und nicht-explizit. Tatsächlich ist es aber für jede konkrete Form Q leicht, G_0 und G_1 zu bestimmen. Dann hängt die gegebene Schranke nur mehr von t ab, die Integrale können (z.B. mit Unterstützung von *Derive* [15]) elementar ausgewertet werden, und man erhält stets ein ähnliches Ergebnis wie in Satz 1A, wobei der größte Term durchwegs $14t^{3/2}$ ist unabhängig von Q . (Vgl. Bemerkung 2 am Ende des Beweises.)

Um Satz 1A aus Satz 1B herzuleiten, braucht man letzteren nur auf den Spezialfall der Kugel anzuwenden. Hier ist $G_0 = 1$, $G_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, und man erhält durch Auswerten der Integrale und Einsetzen aller Definitionen die in Satz 1A behauptete Schranke, abgesehen von etwas besseren numerischen Konstanten und einem zusätzlichen Summanden

$$h(t) = \frac{0.6302963t + 1.9074383\sqrt{t} + 0.23678722}{6.878339t^{3/2} - 3.8106}.$$

Dieser fällt monoton in t , und es ist $h(t) \leq 0.06$ für $t \geq 10$. Daraus folgt Satz 1A trivial.

Beweis von Satz 1B. Wir verwenden fettgedruckte Kleinbuchstaben für Elemente des \mathbb{R}^3 , insbesondere seien $\mathbf{m}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$. Für beliebige Teilmengen $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ bezeichne $\chi_{\mathcal{M}}$ die Indikatorfunktion. Weiters sei

$$\delta_0(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon^3} & \text{wenn } f(\mathbf{x}) \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\delta(\mathbf{x}) := (\delta_0 * \delta_0)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta_0(\mathbf{y}) \delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta_0(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \delta_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Unsere Strategie ist, die Indikatorfunktion des Ellipsoids $t\mathcal{E}$ durch Faltung mit δ zu einer stetigen Funktion zu glätten, sodaß darauf die Poissonsche Formel angewendet werden kann und zu einer konvergenten Reihe führt.

Wir behaupten zunächst:

- (i) Aus $f(\mathbf{x}) > 2\varepsilon$ folgt stets $\delta(\mathbf{x}) = 0$.
- (ii) Es gilt $\chi_{(t-2\varepsilon)\mathcal{E}} * \delta \leq \chi_{t\mathcal{E}} \leq \chi_{(t+2\varepsilon)\mathcal{E}} * \delta$.

Beweis. (i) Es sei $f(\mathbf{x}) > 2\varepsilon$, $\delta_0(\mathbf{y}) \neq 0$, dann folgt $f(\mathbf{y}) \leq \varepsilon$ und weiter, nach der Dreiecksungleichung für die konvexe Funktion f , $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) > \varepsilon$, daher $\delta_0(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0$. Also ist $\delta_0(\mathbf{x} + \mathbf{y})\delta_0(\mathbf{y}) = 0$ identisch in \mathbf{y} , damit (i) gezeigt.

(ii) 1. Fall: Es sei $\chi_{t\mathcal{E}}(\mathbf{x}) = 0$, also $f(\mathbf{x}) > t$. Ist außerdem $\delta(\mathbf{y}) \neq 0$, dann folgt $f(\mathbf{y}) \leq 2\varepsilon$ nach (i), und damit $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) > t - 2\varepsilon$. Daher ist $\chi_{(t-2\varepsilon)\mathcal{E}}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\delta(\mathbf{y}) = 0$ identisch in \mathbf{y} , folglich $(\chi_{(t-2\varepsilon)\mathcal{E}} * \delta)(\mathbf{x}) = 0$. Der rechte Teil von (ii) ist trivial.

2. Fall: Es sei $\chi_{t\mathcal{E}}(\mathbf{x}) = 1$, also $f(\mathbf{x}) \leq t$. Ist außerdem $\delta(\mathbf{y}) \neq 0$, dann folgt wieder $f(\mathbf{y}) \leq 2\varepsilon$, und weiter $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq t+2\varepsilon$. Daher ist $\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus (t+2\varepsilon)\mathcal{E}}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\delta(\mathbf{y}) = 0$ identisch in \mathbf{y} , folglich $(\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus (t+2\varepsilon)\mathcal{E}} * \delta)(\mathbf{x}) = 0$, also $(\chi_{(t+2\varepsilon)\mathcal{E}} * \delta)(\mathbf{x}) = 1$. Der linke Teil ist jetzt trivial. \square

Summation über alle $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^3$ ergibt

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^3} (\chi_{(t-2\varepsilon)\mathcal{E}} * \delta)(\mathbf{m}) \leq A_f(t) \leq \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^3} (\chi_{(t+2\varepsilon)\mathcal{E}} * \delta)(\mathbf{m}).$$

Mit der mehrdimensionalen Poissonschen Summenformel (vgl. Bochner [2]) erhalten wir daraus

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \widehat{\chi_{(t-2\varepsilon)\mathcal{E}}}(\mathbf{k}) (\widehat{\delta_0}(\mathbf{k}))^2 \leq A_f(t) \leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \widehat{\chi_{(t+2\varepsilon)\mathcal{E}}}(\mathbf{k}) (\widehat{\delta_0}(\mathbf{k}))^2, \quad (3.4)$$

wenn $\widehat{\cdot}$ wie üblich die Fouriertransformierte bedeutet. Um letztere auszuwerten, bemerken wir zunächst, daß $\widehat{\delta_0}(\mathbf{o}) = 1$ gilt und $\widehat{\chi_{(t \pm 2\varepsilon)\mathcal{E}}}(\mathbf{o}) = \frac{4\pi}{3}(t \pm 2\varepsilon)^3$. Setzen wir (mit $e(w) := e^{2\pi i w}$)

$$I_f(\mathbf{z}) := \int_{f(\mathbf{u}) \leq 1} e(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{u},$$

dann ist weiters, für $\mathbf{k} \neq \mathbf{o}$ und $R = t \pm 2\varepsilon$,

$$\widehat{\chi_{R\mathcal{E}}}(\mathbf{k}) = R^3 I_f(R\mathbf{k}), \quad \widehat{\delta_0}(\mathbf{k}) = \frac{3}{4\pi} I_f(\varepsilon\mathbf{k}). \quad (3.5)$$

Daraus folgt

$$|P_f(t)| \leq \frac{4\pi}{3} ((t+2\varepsilon)^3 - t^3) + \max_{\pm} |P_f^*(t \pm 2\varepsilon)| \quad (3.6)$$

mit

$$P_f^*(R) := R^3 \sum_{\mathbf{o} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} I_f(R\mathbf{k}) \left(\frac{3}{4\pi} I_f(\varepsilon\mathbf{k}) \right)^2. \quad (3.7)$$

Es bleibt $I_f(\mathbf{z})$ für $\mathbf{z} \neq \mathbf{o}$ abzuschätzen. Trivial gilt

$$|I_f(\mathbf{z})| \leq \frac{4\pi}{3}. \quad (3.8)$$

Sei andererseits B eine (symmetrische) (3×3) -Matrix mit $B^2 = A$, dann gilt

$$f^2(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}) = \mathbf{u} A^t \mathbf{u} = (\mathbf{u} B)^t (\mathbf{u} B).$$

Daher ergibt die lineare Transformation $\mathbf{v} = \mathbf{u} B$, wenn wir $\mathbf{w} := \mathbf{z} B^{-1}$ setzen, wegen $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{z}^t (\mathbf{v} B^{-1}) = \mathbf{w}^t \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$,

$$I_f(\mathbf{z}) = \int_{\|\mathbf{v}\|_2 \leq 1} e(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{v}.$$

Drehen wir noch das Koordinatensystem so, daß die neue v_1 -Achse den Vektor \mathbf{w} enthält, dann folgt

$$I_f(\mathbf{z}) = \int_{\|\mathbf{v}\|_2 \leq 1} e(\|\mathbf{w}\|_2 v_1) d(v_1, v_2, v_3) = \int_{\|\mathbf{v}\|_2 \leq 1} e(g(\mathbf{z}) v_1) d(v_1, v_2, v_3),$$

wegen $\|\mathbf{w}\|_2^2 = \mathbf{w}^t \mathbf{w} = \mathbf{z} B^{-1}{}^t (\mathbf{z} B^{-1}) = \mathbf{z} A^{-1}{}^t \mathbf{z} = g^2(\mathbf{z})$. Wir schließen weiter, daß

$$\begin{aligned} |I_f(\mathbf{z})| &= \pi \left| \int_{-1}^1 (1 - v_1^2) e(g(\mathbf{z}) v_1) dv_1 \right| = \left| \frac{\sin(2\pi g(\mathbf{z}))}{2\pi^2 g(\mathbf{z})^3} - \frac{\cos(2\pi g(\mathbf{z}))}{\pi g(\mathbf{z})^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi g(\mathbf{z})^2} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2 g(\mathbf{z})^2}} \leq \frac{1}{\pi g(\mathbf{z})^2} + \frac{1}{8\pi^3 g(\mathbf{z})^4}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Verwenden wir dies in (3.7), so folgt

$$\begin{aligned} |P_f^*(R)| &\leq R^3 \sum_{\mathbf{o} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \left(\frac{1}{\pi R^2 g(\mathbf{k})^2} + \frac{1}{8\pi^3 R^4 g(\mathbf{k})^4} \right) \times \\ &\times \left(\min \left(1, \frac{3}{4\pi^2 \varepsilon^2 g(\mathbf{k})^2} + \frac{3}{32\pi^4 \varepsilon^4 g(\mathbf{k})^4} \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nach Definition von K und b (vgl. (3.1)) ist das auftretende Minimum gleich 1 genau für $g(\mathbf{k}) \leq K$. Wir teilen daher die Summe wie folgt auf:

$$|P_f^*(R)| \leq R^3 \sum_{0 < g(\mathbf{k}) \leq K} \dots + R^3 \sum_{g(\mathbf{k}) > K} \dots =: S_1 + S_2. \quad (3.11)$$

Setzen wir $A_g^-(u) := A_g(u) - 1$, dann ergibt sich mit Verwendung von Stieltjes-Integralen (wegen $t \geq G_0^2$ ist sicher $K > G_0$)

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \frac{R}{\pi} \int_{G_0-}^K u^{-2} dA_g^-(u) + \frac{1}{8\pi^3 R} \int_{G_0-}^{\infty} u^{-4} dA_g^-(u) = \\ &= \frac{R}{\pi} \frac{A_g^-(K)}{K^2} + \frac{2R}{\pi} \int_{G_0}^K \frac{A_g^-(u)}{u^3} du + \frac{1}{2\pi^3 R} \int_{G_0}^{\infty} \frac{A_g^-(u)}{u^5} du. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Definieren wir, für $j \geq 4$,

$$s_j(g, t) := \sum_{g(\mathbf{k}) > K} g(\mathbf{k})^{-j},$$

dann folgt einerseits durch partielle Integration

$$s_j(g, t) = \int_{K+}^{\infty} u^{-j} dA_g^-(u) \leq j \int_K^{\infty} \frac{A_g^-(u)}{u^{j+1}} du, \quad (3.13)$$

andererseits, mit Rückblick auf (3.10), (3.11) und die Definition der F_j in Satz 1B,

$$S_2 = \sum_{j=6,8,10,12} F_j s_j(g, t), \quad (3.14)$$

wieder vorzugsweise mit Unterstützung von *Derive* [15]. Zum Beweis von Satz 1B ist es nun nur noch erforderlich, die Abschätzung

$$A_g^-(u) \leq a_g(u) = \frac{4\pi}{3}(u + G_1)^3 - 1 \quad (3.15)$$

(vgl. (3.3)) zu verifizieren. Dazu zeigen wir, daß

$$\bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3, 0 \leq g(\mathbf{k}) \leq u} (\mathbf{k} + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3) \subseteq (u + G_1)\mathcal{E}_g \quad (3.16)$$

gilt. Ist nämlich $\mathbf{x} = \mathbf{k} + \mathbf{w}$ mit $g(\mathbf{k}) \leq u$, $\|\mathbf{w}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, dann folgt wegen (3.2) $g(\mathbf{w}) \leq G_1$ und wegen der Konvexität $g(\mathbf{k} + \mathbf{w}) \leq u + G_1$, also $\mathbf{x} \in (u + G_1)\mathcal{E}_g$. Betrachtung der Volumina in (3.16) zeigt sofort (3.15). Zusammen mit (3.6) und (3.11) bis (3.14) ergibt sich unmittelbar Satz 1B.

Bemerkungen. 1. Man könnte die erzielte Abschätzung weiter verschärfen, indem man anstelle der groben Schranke (3.15) unseren Satz 1B iterativ in das Argument einsetzt. Auf diese Weise würde z.B. der Term mit $t \log t$ in Satz 1A verschwinden, allerdings bliebe der Hauptfehlerterm $14t^{3/2}$ unverändert. Wir begnügen uns damit, für diesen größten Term einen möglichst kleinen Koeffizienten erhalten zu haben, dazu einige weitere Summanden von kleinerer Ordnung, die nicht wesentlich stören.

2. Es ist instruktiv, sich im Detail anzusehen, wie der erwähnte Hauptfehler $14t^{3/2}$ unabhängig von der quadratischen Form Q zustande kommt, und warum die Wahl $c = 0.277$ vor (3.1) ebenfalls für jedes Ellipsoid in diesem Sinn optimal ist. Wir verwenden dazu die Notation (für beliebige reelle Funktionen H_1 und $H_2 > 0$)

$$H_1(t) \prec H_2(t) \quad : \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\max(H_1(t) - H_2(t), 0)}{H_2(t)} = 0.$$

So gilt nach Konstruktion $R^{\pm 1} \prec t^{\pm 1}$, $a_g(u) \prec \frac{4\pi}{3}u^3$, damit folgt aus der Darstellung in Satz 1B nach leichter Rechnung

$$\overline{P}_f^*(t \pm 2\varepsilon) \prec \left(4b + \frac{3}{2\pi^4 b^3} + \frac{3}{10\pi^6 b^5} + \frac{15}{896\pi^8 b^7} \right) \frac{t^{3/2}}{c}.$$

Außerdem gilt natürlich $\frac{4\pi}{3}((t + 2\varepsilon)^3 - t^3) \prec 8\pi c t^{3/2}$, also

$$P_f(t) \prec 8\pi c t^{3/2} + \left(4b + \frac{3}{2\pi^4 b^3} + \frac{3}{10\pi^6 b^5} + \frac{15}{896\pi^8 b^7} \right) \frac{t^{3/2}}{c}. \quad (3.17)$$

Ausbalanzieren bezüglich c und Einsetzen des Wertes von b (vor (3.1)) führt auf $c \approx 0.277$, und die rechte Seite von (3.17) wird $13.92 \dots t^{3/2}$.

Die hier verwendete Methode kann auch verwendet werden, um die eingangs zitierte Abschätzung (2.1) etwas zu verbessern und zu verallgemeinern. Wir formulieren dieses Ergebnis als

Satz 2. *Es sei Q eine binäre positiv definite quadratische Form mit Determinante 1, und wie vorher $f = \sqrt{Q}$ und $g = \sqrt{Q^{-1}}$ Distanzfunktion bzw. Stützfunktion der Ellipse $\mathcal{E}^{(2)} : Q \leq 1$. Weiters sei analog früher*

$$A_f^{(2)}(t) := \# \left(t\mathcal{E}^{(2)} \cap \mathbb{Z}^2 \right), \quad P_f^{(2)}(t) := A_f^{(2)}(t) - \pi t^2$$

und

$$G_0 := \min_{\mathbf{o} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} g(\mathbf{k}), \quad G_1 := \max_{\mathbf{w} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} g(\mathbf{w}), \quad a_g^{(2)}(u) := \pi(u + G_1)^2 - 1.$$

Dann gilt für $t \geq 28 G_0^3$

$$\begin{aligned} \left| P_f^{(2)}(t) \right| &\leq \pi \left((t + \varepsilon)^2 - t^2 \right) + \frac{(t + \varepsilon)^{1/2}}{3K^{3/2}} a_g^{(2)}(K) + \\ &+ \frac{(t + \varepsilon)^{1/2}}{2} \int_{G_0}^K u^{-5/2} a_g^{(2)}(u) du + \frac{(t + \varepsilon)^{1/2}}{3\pi \varepsilon^{3/2}} \int_K^\infty u^{-4} a_g^{(2)}(u) du, \end{aligned} \quad (*)$$

wobei jetzt

$$\varepsilon := \frac{c}{t^{1/3}}, \quad c := \frac{1}{6} \left(\frac{2823576}{\pi^2} \right)^{1/9} = 0.67317 \dots, \quad K = (3\pi)^{-2/3} \varepsilon^{-1}$$

sei. Insbesondere folgt für den Fall des Kreises, für $t \geq 28$,

$$\left| P^{(2)}(t) \right| \leq 8.46 t^{2/3} + 1.5 t^{1/2} + 1 + \frac{3}{t^{1/3}} + \frac{2.85}{t^{2/3}} + \frac{0.51}{t^{5/6}} + \frac{0.34}{t^{4/3}}.$$

Beweisskizze zu Satz 2. Wir verwenden weitgehend das frühere Argument und notieren nur die notwendigen Modifikationen. Zunächst können wir direkt für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\delta(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\varepsilon^2} & \text{wenn } f(\mathbf{x}) \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

setzen, eine Faltung mit sich selbst ist nicht mehr nötig. Anstelle von (3.4) erhält man somit

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \chi_{\widehat{(t-\varepsilon)\mathcal{E}^{(2)}}}(\mathbf{k}) \widehat{\delta}(\mathbf{k}) \leq A_f^{(2)}(t) \leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \chi_{\widehat{(t+\varepsilon)\mathcal{E}^{(2)}}}(\mathbf{k}) \widehat{\delta}(\mathbf{k}). \quad (3.18)$$

Dabei ist analog zu (3.5), für $\mathbf{o} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$ und $R = t \pm \varepsilon$,

$$\widehat{\chi_{R\mathcal{E}^{(2)}}}(\mathbf{k}) = R^2 I_f(R\mathbf{k}), \quad \widehat{\delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pi} I_f(\varepsilon\mathbf{k}). \quad (3.19)$$

Allerdings führt die Auswertung des Integrals jetzt auf

$$|I_f(\mathbf{z})| = 2 \left| \int_{-1}^1 \sqrt{1-v^2} e(g(\mathbf{z})v) dv \right| = \left| \frac{J_1(2\pi g(\mathbf{z}))}{g(\mathbf{z})} \right|,$$

wobei J_1 die übliche Besselfunktion bezeichnet. Nun ist ⁽²⁾

$$\max_{x>0} |J_1(x)\sqrt{x}| = 0.82503\dots, \quad (3.20)$$

woraus wir

$$|I_f(\mathbf{z})| \leq 0.83 (2\pi)^{-1/2} g(\mathbf{z})^{-3/2} < \frac{1}{3} g(\mathbf{z})^{-3/2}$$

folgern. Mit (3.18), (3.19) ergibt sich daher

$$\left| P_f^{(2)}(t) \right| \leq \pi ((t+\varepsilon)^2 - t^2) + \frac{(t+\varepsilon)^{1/2}}{3\pi} \sum_{\mathbf{o} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} g(\mathbf{k})^{-3/2} \min \left(\pi, \frac{1}{3} \varepsilon^{-3/2} g(\mathbf{k})^{-3/2} \right).$$

Das Minimum in dieser Summe führt auf deren Aufteilung, je nachdem ob $g(\mathbf{k}) \leq K$ oder $g(\mathbf{k}) > K$ ist. Partielle Integration und eine elementare Abschätzung analog zu (3.16) vervollständigen den Beweis von Satz 2.

Im Spezialfall des Kreises ist natürlich $G_0 = 1$, $G_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mit der Ungleichung $(t+\varepsilon)^{1/2} \leq \sqrt{t} (1 + \frac{\varepsilon}{2t})$ erhält man die Aussage von Satz 2 auch für diesen Fall.

Um wieder das Entstehen des Hauptfehlerterms zu überblicken und die Wahl von ε einzusehen, bemerken wir, daß $a_g^{(2)}(u) \prec \pi u^2$ gilt. Damit erhält man aus (*)

$$P_f^{(2)}(t) \prec 2\pi \varepsilon t + \frac{7}{9} (3\pi)^{2/3} \sqrt{\frac{t}{\varepsilon}}.$$

Ausbalancieren ergibt ε wie in Satz 2 und damit für den Hauptfehler $P_f^{(2)}(t) \prec 8.46 t^{2/3}$, wieder unabhängig von der Form Q .

4. Gitterpunkte in einem dreidimensionalen Rotationskörper.

Wir untersuchen nun die analoge Problemstellung (Abschätzung des Gitterrestes mit expliziten Konstanten) für einen kompakten konvexen Körper \mathcal{K} im \mathbb{R}^3 , der rotationssymmetrisch bezüglich der z -Achse und außerdem spiegelsymmetrisch bezüglich der (x, y) -Ebene sei. Sein Rand $\partial\mathcal{K}$ sei hinreichend glatt und überall von beschränkter, nicht-verschwindender Gaußscher Krümmung. Dies präzisieren wir am bequemsten, in dem wir die Schnittkurve \mathcal{C} von $\partial\mathcal{K}$ mit der (y, z) -Ebene betrachten: Diese sei

(2) Bekanntlich gilt $J_1(x) = (2/\pi)^{1/2} x^{-1/2} \cos(x - 3\pi/4) + O(x^{-3/2})$, wobei das Restglied z.B. nach Gradshteyn & Ryzhik [7], F. 8.451, effektiv abgeschätzt werden kann. Das Maximum wird tatsächlich im ersten relativen Extremum $x_{\max} = 2.16587\dots$ angenommen.

z.B. parametrisiert durch $(y, z) = (\rho(\theta) \sin \theta, \rho(\theta) \cos \theta)$, wobei $\rho(\cdot)$ eine gerade, positive, periodische Funktion mit Periode π sei, überall viermal stetig differenzierbar, und durchwegs⁽³⁾ $\rho \rho'' - 2\rho'^2 - \rho^2 \neq 0$. Dann ist

$$r = r_\theta = |\rho(\theta) \rho''(\theta) - 2\rho'^2(\theta) - \rho^2(\theta)|^{-1} (\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta))^{3/2}$$

der entsprechende Krümmungsradius. Wir setzen o.b.d.A. $\rho(0) = 1$ voraus und weiters⁽⁴⁾ $\rho(\frac{\pi}{2}) \leq 1$. Die Kurve \mathcal{C} kann andererseits in den vier Quadranten durch nicht-negative Funktionen⁽⁵⁾ f, g in der Form $y = \pm f(z) \iff z = \pm g(y)$ dargestellt werden. Taylorentwicklung um $y = 0$ ergibt $z = g(y) = 1 + \frac{1}{2}r_0^{-1}y^2 + O(|y|^3)$ und damit, für z nahe 1,

$$\begin{aligned} y = f(z) &= (2r_0)^{1/2}(1-z)^{1/2}(1+O(1-z)), \\ f'(z) &= -(\tfrac{1}{2}r_0)^{1/2}(1-z)^{-1/2}(1+O(1-z)), \\ f''(z) &= -\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}r_0)^{1/2}(1-z)^{-3/2}(1+O(1-z)). \end{aligned} \quad (4.0)$$

Daraus folgt, daß $f'^2(z) + f(z)f''(z)$ auf ganz $[-1, 1]$ stetig ist, und daher

$$M := \max_{-1 \leq z \leq 1} |f'^2(z) + f(z)f''(z)| < \infty \quad (4.1)$$

gilt. Weiters ersieht man für $z \rightarrow 1-$, daß $f'(z) \rightarrow -\infty$, $f''(z) \rightarrow -\infty$ und $f(z)f'(z) \rightarrow -r_0$. Außerdem folgt aus dem Gesagten, für alle $z \in]-1, 1[$,

$$f(z) = f(-z) > 0, \quad \operatorname{sgn} f'(z) = -\operatorname{sgn} z, \quad f''(z) < 0, \quad f(1) = 0, \quad f(0) \leq 1. \quad (4.2)$$

Wir interessieren uns wieder für die Gitterpunktanzahl im linear vergrößerten Körper $t\mathcal{K}$, t ein großer Parameter, also für

$$A_{\mathcal{K}}(t) = \#(t\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^3) = \#\left\{(n_1, n_2, m) \in \mathbb{Z}^3 : n_1^2 + n_2^2 \leq t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right), |m| \leq t\right\},$$

und insbesondere für den Gitterrest $P_{\mathcal{K}}(t) := A_{\mathcal{K}}(t) - t^3 \operatorname{vol}(\mathcal{K})$.

Satz 3. *Es bezeichne $z_0 \geq 0$ die kleinste Zahl, so daß f'' auf $[z_0, 1[$ monoton ist⁽⁶⁾, und es sei $F_2 := \max_{[0, z_0[} |f''|$ falls $z_0 > 0$, und $F_2 := 0$ für $z_0 = 0$. Dann gilt unter den formulierten Voraussetzungen an den Körper \mathcal{K} für jedes $t > 0$*

$$|P_{\mathcal{K}}(t)| \leq C_1 t^{3/2} + C_2 t \log t + C_3 t + C_4 t^{3/4} + C_5 t^{1/2} + C_6$$

(3) Dies entspricht dem Nichtverschwinden der Krümmung.

(4) Diese zusätzliche Annahme ist bequem und vereinfacht die späteren ohnehin recht voluminösen Formeln. Unser Argument gilt aber unverändert für $\rho(\frac{\pi}{2}) > 1$, wobei allerdings dann das Endergebnis auch von $\rho(\frac{\pi}{2})$ abhängt.

(5) Es besteht wohl keine Verwechslungsgefahr mit den früher so bezeichneten Distanzfunktionen.

(6) Offensichtlich ist $z_0 < 1$, da analog (4.0) $|f'''(z)| \asymp (1-z)^{-5/2}$ für z nahe 1 gilt.

mit

$$\begin{aligned}
C_1 &:= 53 r_{\max}^{1/2} F_2^{3/4} + 12 r_{\max}^{1/2} F_2^{1/4} + 73 r_{\max}^{3/4} + 13 r_{\max}^{1/4}, \\
C_2 &:= 7315 r_{\max}^{1/2} + 241, \\
C_3 &:= 3658 r_{\max}^{1/2} \log_+(r_{\max}) + 642 \log\left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right) + 1.6(M + r_0) + 281, \\
C_4 &:= 19 r_{\max}^{3/4} F_2^{9/8} + 34 r_{\max}^{5/8}, \\
C_5 &:= 1302 r_{\max}^{1/4}, \\
C_6 &:= 5.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen r_{\max}, r_{\min} die Extremwerte des Krümmungsradius r_θ auf \mathcal{C} .

Vorbereitung der Abschätzung. Als Präzisierung des O -Symbols bezeichne Θ irgendeine reelle Größe, die von den Parametern beliebig abhängen darf, aber jedenfalls betragslich ≤ 1 ist. Offensichtlich gilt

$$A_{\mathcal{K}}(t) = \sum_{|m| \leq t} \left(\sum_{n_1^2 + n_2^2 \leq t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right)} 1 \right). \quad (4.3)$$

Dabei ist die innere Summe der Zahl der Gitterpunkte in einer Kreisscheibe. Für eine solche findet man im wesentlichen bereits bei Fricker [5], S. 42/43, die elementare Abschätzung (mit $\psi(w) := w - [w] - \frac{1}{2}$, wobei $[w]$ die größte ganze Zahl $\leq w$ bezeichnet)

$$\sum_{n_1^2 + n_2^2 \leq X^2} 1 = \pi X^2 - 8 \sum_{0 < n \leq X/\sqrt{2}} \psi\left(\sqrt{X^2 - n^2}\right) + 5\Theta, \quad (4.4)$$

wenn man das dort angegebene $O(1)$ explizit macht. Durch Einsetzen von (4.4) in (4.3) erhält man

$$A_{\mathcal{K}}(t) = \pi t^2 \sum_{|m| \leq t} f^2\left(\frac{m}{t}\right) - 8 \sum_{|m| \leq t} \left(\sum_{0 < n \leq \frac{t}{\sqrt{2}} f\left(\frac{m}{t}\right)} \psi\left(\sqrt{t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right) - n^2}\right) \right) + 5\Theta(2t+1).$$

Auf die erste Summe wird nun die Euler-MacLaurin'sche Summenformel angewendet. (Vgl. z.B. Krätzel [LP], S. 20.) Dies ergibt wegen $f(\pm 1) = 0$

$$\pi t^2 \sum_{|m| \leq t} f^2\left(\frac{m}{t}\right) = \pi t^2 \int_{-t}^t f^2\left(\frac{u}{t}\right) du + 2\pi t \int_{-t}^t f\left(\frac{u}{t}\right) f'\left(\frac{u}{t}\right) \psi(u) du.$$

Der erste Term rechts ist offensichtlich $t^3 \text{vol}(\mathcal{K})$. Mit $\psi_1(u) = \int_0^u \psi(\tau) d\tau = \frac{1}{8}\Theta$ folgt wegen $\lim_{z \pm 1} f(z) f'(z) = \mp r_0$ (vgl. (4.1) - (4.2))

$$\begin{aligned}
\int_{-t}^t f\left(\frac{u}{t}\right) f'\left(\frac{u}{t}\right) \psi(u) \, du &= \frac{\Theta}{4} r_0 - \frac{1}{t} \int_{-t}^t \left(f'^2\left(\frac{u}{t}\right) + f\left(\frac{u}{t}\right) f''\left(\frac{u}{t}\right) \right) \psi_1(u) \, du = \\
&= \frac{\Theta}{4} r_0 - \int_{-1}^1 \left(f'^2(z) + f(z) f''(z) \right) \psi_1(tz) \, dz = \frac{\Theta}{4} (r_0 + M).
\end{aligned}$$

Wir erhalten also insgesamt

$$A_{\mathcal{K}}(t) = \text{vol}(\mathcal{K})t^3 - 16 P^*(t) + \left(\left(\frac{1}{2} \pi (r_0 + M) + 10 \right) t + 5 \right) \Theta, \quad (4.5)$$

$$P^*(t) := \sum'_{0 \leq m \leq t} \left(\sum_{0 < n \leq \frac{t}{\sqrt{2}} f\left(\frac{m}{t}\right)} \psi \left(\sqrt{t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right) - n^2} \right) \right),$$

wobei \sum' bedeutet, daß der Summand mit $m = 0$ den Faktor $\frac{1}{2}$ erhält.

Hilfsmittel zum Beweis.

Hilfssatz 1. (Exponentialsumme und ψ -Summe.) *Durchläuft (n_1, n_2) eine beliebige endliche Teilmenge J von \mathbb{Z}^2 , dann gilt für jedes $Z > 1$*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \left| \sum_{(n_1, n_2) \in J} \psi(f(n_1, n_2)) \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{\pi Z} \sum_{(n_1, n_2) \in J} 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \min \left(\frac{1}{\nu}, \frac{Z^2}{\nu^3} \right) \left| \sum_{(n_1, n_2) \in J} e^{2\pi i \nu f(n_1, n_2)} \right|.
\end{aligned}$$

Ferner bestehen die Abschätzungen

$$(ii) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \min \left(\frac{1}{\nu}, \frac{Z^2}{\nu^3} \right) t^\alpha \leq \begin{cases} 2Z & \text{für } \alpha = 1, \\ \frac{8}{3} Z^{1/2} & \text{für } \alpha = \frac{1}{2}, \\ \log Z + 2 & \text{für } \alpha = 0. \end{cases}$$

Beweis. Ohne numerische Konstanten findet man (i) in Krätzel [LP], Kap. 1.3, S. 26/27. Ein Beweis von (i) mit numerischen Konstanten verläuft völlig analog zum Beweis von Hilfssatz 1.3 in Krätzel [AZ], S. 18.

Um (ii) zu beweisen, wendet man auf die Zerlegung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \min \left(\frac{1}{\nu}, \frac{Z^2}{\nu^3} \right) t^\alpha = 1 + \sum_{1 < \nu \leq Z} \frac{1}{\nu} + Z^2 \sum_{\nu > Z} \frac{1}{\nu^3}$$

zweimal die Eulersche Summenformel an (vgl. [LP], S. 20, Th. 1.3) und schätzt die auftretenden Restintegrale über die Funktion ψ mit Hilfe des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung ab. \square

Hilfssatz 2. (Exponentialsumme und Exponentialintegral.) *Es seien $a < b$ reell, F stetig auf $[a, b]$, F' stetig in $]a, b[$ und monoton, $F'_{]a, b[}$ bezeichne das Bild von $]a, b[$ unter F' .*

(i) *Falls $F'_{]a, b[} \subseteq]0, 1[$, folgt*

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i F(n)} = \int_a^b e^{2\pi i F(u)} du + \int_a^b e^{2\pi i (F(u) - u)} du + \Theta \left(1 + \frac{4}{\pi} \right).$$

(ii) *Falls $F'_{]a, b[} \subseteq]0, 1 - \varphi[$ für ein $\varphi > 0$, dann gilt*

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i F(n)} = \int_a^b e^{2\pi i F(u)} du + \Theta \left(1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\varphi} + 1 \right) \right).$$

(iii) *Falls $F'_{]a, b[} \subseteq]\varphi, 1[$ für ein $\varphi > 0$, dann folgt*

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i F(n)} = \int_a^b e^{2\pi i (F(u) - u)} du + \Theta \left(1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\varphi} + 1 \right) \right).$$

Beweis. (i) und (ii) werden in Wahrheit bereits in Krätzel [AZ], S. 167 hergeleitet, wenn man bei den Konstanten nichts verschenkt. (iii) folgt aus (ii), indem man $F(u)$ durch $u - F(u)$ ersetzt und konjugiert. \square

Hilfsatz 3. *Es sei F reell, zweimal stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und dort $|F''(u)| \geq \lambda > 0$. Dann ist*

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i F(n)} \right| \leq |F'(b) - F'(a)| \frac{5}{\sqrt{\lambda}} + \frac{11}{\sqrt{\lambda}}.$$

Beweis. Das ist (1.9) im Korollar zu Satz 1.3, S. 16 in Krätzel [AZ]. \square

Hilfssatz 4.⁽⁷⁾ *Es sei \mathcal{C} die Schnittkurve des Randes $\partial\mathcal{K}$ mit der (y, z) -Ebene. Ihr Teil im ersten Quadranten sei durch $y = f(z) \iff z = g(y)$ dargestellt. Dann gilt für $0 \leq z < 1$*

$$\frac{1}{r_{\max}} \leq |f''(z)| \leq 8^{3/4} \frac{r_{\max}^3}{r_{\min}^4} (1 - z)^{-3/2}.$$

(7) Dies ist eine effektive Version der bereits in (4.0) enthaltenen Schranke $f''(z) \ll (1 - z)^{-3/2}$.

Beweis. Aus

$$\frac{1}{r_{\max}} \leq \frac{(1 + f'^2(z))^{3/2}}{r_{\max}} \leq |f''(z)| \leq \frac{(1 + f'^2(z))^{3/2}}{r_{\min}} \quad (*)$$

folgt

$$|f''(z)| \leq \begin{cases} \frac{\sqrt{8}}{r_{\min}} & \text{wenn } |f'(z)| \leq 1, \\ \frac{\sqrt{8}}{r_{\min}} |f'(z)|^3 & \text{wenn } |f'(z)| \geq 1. \end{cases} \quad (**)$$

Für $|f'(z)| \leq 1$ ist damit mehr als die Behauptung bewiesen. Wir setzen daher im Folgenden $|f'(z)| \geq 1$ voraus, was $|f'(u)| \geq 1$ für $z \leq u < 1$ impliziert. Es sei $(y, z) \in \mathbb{R}_+^2$ mit $y = f(z) \iff z = g(y)$. Wegen $|f'(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow 1-$ ist

$$\frac{1}{f'(z)} = - \int_1^z \frac{f''(u)}{f'^2(u)} du = - \int_0^y \frac{f''(g(w))}{f'^3(g(w))} dw,$$

daraus folgt mit (*) $\frac{1}{|f'(z)|} \geq \frac{y}{r_{\max}}$, also nach (**)

$$|f''(z)| \leq \sqrt{8} \frac{r_{\max}^3}{r_{\min}} \frac{1}{f^3(z)}. \quad (***)$$

Wegen $g(0) = 1$ ist weiters, mittels partieller Integration,

$$1 - z = 1 - g(y) = - \int_0^y g'(w) dw = - \int_0^y \frac{dw}{f'(g(w))} = - \int_0^y (y - w) \frac{f''(g(w))}{f'^3(g(w))} dw,$$

folglich, wegen (**), $1 - z \leq \sqrt{2} y^2 r_{\min}^{-1}$, also $y = f(z) \geq 2^{-1/4} (r_{\min} (1 - z))^{1/2}$. Somit ist nach (***)

$$|f''(z)| \leq 8^{3/4} \frac{r_{\max}^3}{r_{\min}^{5/2}} (1 - z)^{-3/2}.$$

Da aus $g(0) = 1$, $f(0) \leq 1$, $f'(0) = g'(0) = 0$ geometrisch $r_{\min}^{-1} \geq 1$ folgt, ist damit Hilfssatz 4 bewiesen. \square

Abschätzung von Exponentialsummen. Wegen (4.5) haben wir Summen der Gestalt

$$T = T(a, b; t) = \sum_{at < m \leq bt} \sum_{0 < n \leq \frac{t}{\sqrt{2}} f\left(\frac{m}{t}\right)} \psi \left(\sqrt{t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right) - n^2} \right) \quad (4.6)$$

zu betrachten mit reellen Werten $0 < a < b \leq 1$, von denen die Abschätzung abhängen darf. Angesichts von Hilfssatz 1 führt dies auf Exponentialsummen

$$\sum_{at < m \leq bt} \sum_{0 < n \leq \frac{t}{\sqrt{2}} f\left(\frac{m}{t}\right)} e^{-2\pi i \nu \sqrt{t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right) - n^2}},$$

ν eine positive ganze Zahl. Wegen

$$0 < n \leq \frac{t}{\sqrt{2}} f\left(\frac{m}{t}\right) \iff 0 < \frac{n}{\sqrt{x^2 f^2(m/x) - n^2}} \leq 1$$

erhalten wir in natürlicher Weise Teilsummen

$$S(k, \nu; a, b; t) := \sum_{at < m \leq bt} \sum_{k < \nu n / \sqrt{x^2 f^2(m/x) - n^2} \leq k+1} e^{-2\pi i \nu \sqrt{t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right) - n^2}}, \quad (4.7)$$

$k \in \{0, 1, \dots, \nu - 1\}$. Wir spalten diese in weitere drei Teilsummen S_1, S_2, S_3 auf, je nachdem, wie nahe bei der jeweils inneren Summation $\nu n / \sqrt{x^2 f^2(m/x) - n^2}$ der nächstliegenden ganzen Zahl kommt.

Abschätzung der Exponentialsumme S_1 . Für $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$ und $0 < \vartheta \leq \frac{1}{2}$ sei

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1(k, \nu; a, b; t) := \sum_{at < m \leq bt} \sum_{k + \vartheta < \nu n / \sqrt{x^2 f^2(m/x) - n^2} \leq k + 1 - \vartheta} e^{-2\pi i \nu \sqrt{t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right) - n^2}} = \\ &= \sum_{at < m \leq bt} \sum_{\vartheta < \nu n / \sqrt{t^2 f^2(m/t) - n^2} - k \leq 1 - \vartheta} e^{-2\pi i (\nu \sqrt{t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right) - n^2} + kn)}. \end{aligned}$$

Definieren wir (bei durchwegs positiven reellen Werten aller Variabler) eine Funktion φ durch Auflösen von

$$\frac{d}{du_1} \left(-\sqrt{t^2 f^2(u_2/t) - u_1^2} \right) = y \quad y \in]0, 1]$$

nach u_1 , also

$$u_1 = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} t f\left(\frac{u_2}{t}\right) =: \varphi(y, u_2, t),$$

dann folgt auch

$$\frac{d}{du_1} \left(-\nu \sqrt{t^2 f^2(u_2/t) - u_1^2} - k u_1 \right) = y \iff u_1 = \varphi\left(\frac{k + y}{\nu}, u_2, t\right).$$

Somit ergibt sich

$$S_1 = \sum_{at < m \leq bt} \sum_{\varphi\left(\frac{k + \vartheta}{\nu}, m, t\right) < n \leq \varphi\left(\frac{k + 1 - \vartheta}{\nu}, m, t\right)} e^{-2\pi i (\nu \sqrt{t^2 f^2\left(\frac{m}{t}\right) - n^2} + kn)}.$$

Nach Teil (i) von Hilfssatz 2 ist

$$S_1 = S_{11} + S_{12} + \Theta \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) ((b-a)t + 1) \quad (4.8)$$

mit

$$\begin{aligned} S_{11} &= \sum_{at < m \leq bt} \int_{\varphi(\frac{k+\vartheta}{\nu}, m, t)}^{\varphi(\frac{k+1-\vartheta}{\nu}, m, t)} e^{-2\pi i(\nu \sqrt{t^2 f^2(\frac{m}{t}) - u^2} + ku)} du, \\ S_{12} &= \sum_{at < m \leq bt} \int_{\varphi(\frac{k+\vartheta}{\nu}, m, t)}^{\varphi(\frac{k+1-\vartheta}{\nu}, m, t)} e^{-2\pi i(\nu \sqrt{t^2 f^2(\frac{m}{t}) - u^2} + (k+1)u)} du. \end{aligned}$$

Wir führen die Abschätzung von S_{11} im Detail aus, jene von S_{12} verläuft genauso und liefert das gleiche Ergebnis. Die Substitution

$$u = \varphi \left(\frac{k+y}{\nu}, m, t \right) = \frac{k+y}{\sqrt{\nu^2 + (k+y)^2}} t f \left(\frac{m}{t} \right)$$

(mit y als neuer Integrationsvariabler) ergibt

$$\nu \sqrt{t^2 f^2 \left(\frac{m}{t} \right) - u^2} + ku = \eta(y) t f \left(\frac{m}{t} \right), \quad \eta(y) := \frac{\nu^2 + k(k+y)}{\sqrt{\nu^2 + (k+y)^2}}$$

mit

$$\frac{\nu}{\sqrt{2}} \leq \frac{\nu^2}{\sqrt{\nu^2 + (k+1)^2}} \leq \eta(y) \leq \sqrt{\nu^2 + (k+y)^2} \leq \sqrt{2} \nu, \quad (4.9)$$

und weiter nach einfacher Rechnung $du = -t f \left(\frac{m}{t} \right) \frac{\eta'(y)}{y} dy$, also

$$\int_{\varphi(\frac{k+\vartheta}{\nu}, m, t)}^{\varphi(\frac{k+1-\vartheta}{\nu}, m, t)} e^{-2\pi i(\nu \sqrt{t^2 f^2(\frac{m}{t}) - u^2} + ku)} du = -t f \left(\frac{m}{t} \right) \int_{\vartheta}^{1-\vartheta} e^{-2\pi i \eta(y) t f(m/t)} \frac{\eta'(y)}{y} dy.$$

Mittels partieller Integration ist dies gleich

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{1-\vartheta} e^{-2\pi i \eta(1-\vartheta) t f(\frac{m}{t})} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\vartheta} e^{-2\pi i \eta(\vartheta) t f(\frac{m}{t})} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta}^{1-\vartheta} e^{-2\pi i \eta(y) t f(m/t)} \frac{dy}{y^2}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$S_{11} = -S_{111} + S_{112} - S_{113} \quad (4.10)$$

mit

$$\begin{aligned} S_{111} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{1-\vartheta} \sum_{at < m \leq bt} e^{-2\pi i \eta(1-\vartheta)t f(\frac{m}{t})}, \\ S_{112} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\vartheta} \sum_{at < m \leq bt} e^{-2\pi i \eta(\vartheta)t f(\frac{m}{t})}, \\ S_{113} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta}^{1-\vartheta} \left(\sum_{at < m \leq bt} e^{-2\pi i \eta(y)t f(m/t)} \right) \frac{dy}{y^2}. \end{aligned}$$

Auf jede dieser Exponentialsummen wird jetzt Hilfssatz 3 angewendet, mit

$$F(u) = -\eta(y) t f\left(\frac{u}{t}\right), \quad y \in [\vartheta, 1-\vartheta].$$

Dann ist für $at \leq u \leq bt$

$$\begin{aligned} F'(u) &= -\eta(y) f'\left(\frac{u}{t}\right) > 0, \\ F''(u) &= -\eta(y) \frac{1}{t} f''\left(\frac{u}{t}\right) \geq \eta(y) \frac{1}{t} \min_{[a,b]} |f''| =: \lambda > 0. \end{aligned}$$

Mit $0 < \vartheta \leq \frac{1}{2}$ folgt nach Hilfssatz 3, unter Beachtung von (4.9),

$$\begin{aligned} |S_{111}| &\leq \frac{5}{\pi} \eta(1-\vartheta) |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{t}{\eta(1-\vartheta) \min_{[a,b]} |f''|}} + \\ &+ \frac{11}{\pi} \sqrt{\frac{t}{\eta(1-\vartheta) \min_{[a,b]} |f''|}} \leq \\ &\leq \frac{5}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t}{\min_{[a,b]} |f''|}} + \frac{11}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}}, \\ |S_{112}| &\leq \frac{5}{\pi} 2^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{\vartheta} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t}{\min_{[a,b]} |f''|}} + \frac{11}{\pi} 2^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{\vartheta} \sqrt{\frac{t}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}}. \\ |S_{113}| &\leq \left(\frac{5}{\pi} 2^{-\frac{3}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t}{\min_{[a,b]} |f''|}} + \frac{11}{\pi} 2^{-\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{t}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} \right) \frac{1}{\vartheta}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für S_{11} nach (4.10) insgesamt

$$|S_{11}| \leq \frac{5}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t}{\min_{[a,b]} |f''|}} \left\{ \frac{1}{\vartheta} + 1 \right\} + \frac{11}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} \left\{ \frac{1}{\vartheta} + 1 \right\}.$$

Da für S_{12} die gleiche Abschätzung gilt, folgt mit (4.9)

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \frac{10}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t}{\min_{[a,b]} |f''|}} \left\{ \frac{1}{\vartheta} + 1 \right\} + \\ &+ \frac{22}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} \left\{ \frac{1}{\vartheta} + 1 \right\} + \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) ((b-a)t + 1). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Abschätzung der Exponentialsumme S_2 . Für $0 < \vartheta \leq \frac{1}{2}$ und $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$ sei⁽⁸⁾

$$S_2 = S_2(k, \nu; a, b; t) = \sum_{at < m \leq bt} \sum_{k < \nu n / \sqrt{t^2 f^2(m/t) - n^2} \leq k + \vartheta} e^{-2\pi i \nu \sqrt{t^2 f^2(m/t) - n^2}}.$$

Nach Teil (ii) von Hilfssatz 2 ist

$$S_2 = S_{21} + \Theta \left(1 + \frac{6}{\pi} \right) ((b-a)t + 1) \quad (4.12)$$

mit

$$S_{21} := \sum_{at < m \leq bt} \int_{\varphi(\frac{k}{\nu}, m, t)}^{\varphi(\frac{k+\vartheta}{\nu}, m, t)} e^{-2\pi i (\nu \sqrt{t^2 f^2(\frac{m}{t}) - u^2} + ku)} du.$$

Die Substitution

$$u = \varphi \left(\frac{k+y}{\nu}, m, t \right) = \frac{k+y}{\sqrt{\nu^2 + (k+y)^2}} t f \left(\frac{m}{t} \right)$$

im Integral ergibt wie vorher

$$\begin{aligned} S_{21} &= - \sum_{at < m \leq bt} \int_0^{\vartheta} t f \left(\frac{m}{t} \right) e^{-2\pi i \eta(y) t f(\frac{m}{t})} \frac{\eta'(y)}{y} dy = \\ &= - \int_0^{\vartheta} \frac{\eta'(y)}{y} \left\{ t f(b) \sum_{at < m \leq bt} e^{-2\pi i \eta(y) t f(\frac{m}{t})} - \int_{at}^{bt} f' \left(\frac{u}{t} \right) \sum_{at < m \leq u} e^{-2\pi i \eta(y) t f(\frac{m}{t})} du \right\} dy. \end{aligned}$$

mittels partieller Summation.

Auf die Exponentialsummen hier wird nun wieder Hilfssatz 3 angewendet. Beachtet man $f(b) \leq f(a) \leq f(0) \leq 1$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |S_{21}| &\leq \left| \int_0^{\vartheta} \frac{\eta'(y)}{y} dy \right| \left\{ 10 \cdot 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t^3}{\min_{[a,b]} |f''|}} + 22 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t^3}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} \right\} \\ &\leq \vartheta \left\{ 10 \cdot 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{t^3}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} + 22 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t^3}{\nu^3 \min_{[a,b]} |f''|}} \right\}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (4.12) erhalten wir daher

$$\begin{aligned} |S_2| &\leq \vartheta \left\{ 10 \cdot 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{t^3}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} + 22 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t^3}{\nu^3 \min_{[a,b]} |f''|}} \right\} + \\ &\quad + \left(1 + \frac{6}{\pi} \right) ((b-a)t + 1). \end{aligned} \quad (4.13)$$

⁽⁸⁾ Ein Blick zurück auf (4.7) ist hier hilfreich.

Abschätzung der Exponentialsumme S_3 . Wir betrachten zuletzt

$$S_3 = \sum_{at < m \leq bt} \sum_{k+1-\vartheta < \nu n / \sqrt{t^2 f^2(m/t) - n^2} \leq k+1} e^{-2\pi i \nu \sqrt{t^2 f^2(\frac{m}{t}) - n^2}}$$

mit $0 < \vartheta \leq \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$. Nach Teil (iii) von Hilfssatz 2 erhält man analog der eben durchgeführten Abschätzung

$$|S_3| \leq \vartheta \left\{ 10 \cdot 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{t^3}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} + 22 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t^3}{\nu^3 \min_{[a,b]} |f''|}} \right\} + \left(1 + \frac{6}{\pi} \right) ((b-a)t + 1). \quad (4.14)$$

Zusammenfassung der Exponentialsummen-Abschätzung. Durch Kombination der Ergebnisse (4.11), (4.13) und (4.14) erhalten wir für die in (4.7) erklärte Summe

$$\begin{aligned} |S(k, \nu; a, b; t)| &\leq \frac{10}{\pi} \cdot 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t}{\min_{[a,b]} |f''|}} \left\{ \frac{1}{\vartheta} + 1 \right\} + \\ &\quad + \frac{22}{\pi} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} \left\{ \frac{1}{\vartheta} + 1 \right\} + \\ &\quad + \vartheta \left(20 \cdot 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{t^3}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} + 44 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t^3}{\nu^3 \min_{[a,b]} |f''|}} \right) + \\ &\quad + \left(3 + \frac{16}{\pi} \right) ((b-a)t + 1). \end{aligned}$$

Wählt man nun für $\nu \leq \frac{\pi t}{2}$

$$\vartheta = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi t}},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} |S(k, \nu; a, b; t)| &\leq \frac{20}{\sqrt{\pi \min_{[a,b]} |f''|}} 8^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| t + \\ &\quad + \frac{10}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t}{\min_{[a,b]} |f''|}} + \\ &\quad + \frac{44}{\sqrt{\pi \min_{[a,b]} |f''|}} 8^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{t}{\nu} + \frac{22}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t}{\nu \min_{[a,b]} |f''|}} + \\ &\quad + \left(3 + \frac{16}{\pi} \right) ((b-a)t + 1), \end{aligned}$$

was sich leicht zu

$$\begin{aligned}
|S(k, \nu; a, b; t)| &\leq \frac{20}{\sqrt{\pi \min_{[a,b]} |f''|}} 8^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| t + \\
&+ \frac{10}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t}{\min_{[a,b]} |f''|}} + \\
&+ \frac{55}{\sqrt{\pi \min_{[a,b]} |f''|}} 8^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{t}{\nu} + \left(3 + \frac{16}{\pi}\right) ((b-a)t + 1)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

vereinfacht. Die Richtigkeit dieser letzten Abschätzung für $\nu > \frac{\pi t}{2}$ folgt sofort allein aus den Schranken für S_2 und S_3 mit $\vartheta = \frac{1}{2}$.

Abschätzung der ψ -Summe. Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, die vor (4.6) erklärte Bruchteilsumme $T(a, b; t)$ zu behandeln. Angesichts von (4.6), (4.7) und (4.14), verwendet für $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$, folgt mittels Hilfssatz 1, mit noch verfügbaren Parametern $\nu \in \mathbb{Z}^+$ und $Z > 1$,

$$\begin{aligned}
|T(a, b; t)| &\leq \frac{1}{\pi Z} \sum_{at < m \leq bt} \sum_{0 < n \leq \frac{t}{\sqrt{2}}} 1 + \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{\nu}, \frac{Z^2}{\nu^3}\right) \left| \sum_{at < m \leq bt} \sum_{0 < n \leq \frac{t}{\sqrt{2}} f(\frac{m}{t})} e^{-2\pi i \nu \sqrt{t^2 f^2(\frac{m}{t}) - n^2}} \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi \sqrt{2}} ((b-a)t + 1) \frac{t}{Z} + \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{\nu}, \frac{Z^2}{\nu^3}\right) \left\{ \frac{20\nu}{\sqrt{\pi \min_{[a,b]} |f''|}} 8^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| t + \right. \\
&+ \frac{10}{\pi} 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{\nu t}{\min_{[a,b]} |f''|}} + \frac{55}{\sqrt{\pi \min_{[a,b]} |f''|}} 8^{\frac{1}{4}} t + \\
&+ \left. \left(3 + \frac{16}{\pi}\right) ((b-a)t + 1) \nu \right\} \\
&\leq \frac{b-a}{\pi \sqrt{2}} \frac{t^2}{Z} + \frac{40Z}{\sqrt{\pi^3 \min_{[a,b]} |f''|}} 8^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| t + \\
&+ \frac{80}{3\pi^2} 2^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{Zt}{\min_{[a,b]} |f''|}} + \frac{55}{\sqrt{\pi^3 \min_{[a,b]} |f''|}} 8^{\frac{1}{4}} t (\log Z + 2) + \\
&+ \frac{1}{\pi} \left(6 + \frac{32}{\pi}\right) ((b-a)t + 1) Z + \frac{t}{\pi \sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun

$$Z := \frac{1}{4\sqrt{5}} 2^{-\frac{1}{8}} (\pi \min_{[a,b]} |f''|)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{(b-a)t}{|f'(b) - f'(a)|}}. \tag{4.16}$$

(Für den Fall, daß $Z \leq 1$ vgl. man (4.18) unten.) Dann erhalten wir aus der zuletzt angeschriebenen Abschätzung

$$\begin{aligned}
|T(a, b; t)| &\leq 4\sqrt{5} \left(\frac{2}{\pi^2} \right)^{\frac{5}{8}} \sqrt{(b-a)|f'(b) - f'(a)|} (\min_{[a,b]} |f''|)^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{3}{2}} + \\
&+ \frac{40}{3} 2^{\frac{3}{16}} 5^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{15}{8}} (b-a)^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)|^{\frac{3}{4}} (\min_{[a,b]} |f''|)^{-\frac{3}{8}} t^{\frac{3}{4}} + \\
&+ \frac{55}{\sqrt{\pi^3 \min_{[a,b]} |f''|}} 2^{-\frac{1}{4}} t \log \left(\frac{(b-a) \sqrt{\min_{[a,b]} |f''|} t}{|f'(b) - f'(a)|} \right) + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{5}} 2^{-\frac{1}{8}} \pi^{-\frac{3}{4}} \left(3 + \frac{16}{\pi} \right) ((b-a)t + 1) (\min_{[a,b]} |f''|)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{(b-a)t}{|f'(b) - f'(a)|}} \\
&+ \frac{t}{\pi\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Um dies weiter zu vereinfachen, benützen wir die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(b-a)|f'(b) - f'(a)|} (\min_{[a,b]} |f''|)^{-\frac{1}{4}} &= \sqrt{(b-a) \int_a^b |f''(u)| du} (\min_{[a,b]} |f''|)^{-\frac{1}{4}} \leq \\
&\leq (b-a) \sqrt{\max_{[a,b]} |f''|} (\min_{[a,b]} |f''|)^{-\frac{1}{4}} \leq \left| \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f''|} \right|^{1/2} \int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{4}} du,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b-a)^{\frac{1}{4}} |f'(b) - f'(a)|^{\frac{3}{4}} (\min_{[a,b]} |f''|)^{-\frac{3}{8}} &\leq \left| \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f''|} \right|^{3/4} \int_a^b |f''(u)|^{\frac{3}{8}} du, \\
(b-a) \sqrt{\frac{b-a}{|f'(b) - f'(a)|}} (\min_{[a,b]} |f''|)^{\frac{1}{4}} &\leq \left| \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f''|} \right|^{1/4} \int_a^b |f''(u)|^{-\frac{1}{4}} du.
\end{aligned}$$

Weiters bemerken wir: Entweder ist

$$\frac{(b-a) \sqrt{\min_{[a,b]} |f''|}}{|f'(b) - f'(a)|} \leq 1,$$

dann ist der entsprechende Logarithmus kleiner oder gleich 0, oder es gilt

$$1 \leq \frac{(b-a) \sqrt{\min_{[a,b]} |f''|}}{|f'(b) - f'(a)|} \leq \frac{1}{\sqrt{\min_{[a,b]} |f''|}} \leq \sqrt{r_{\max}}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
16|T(a, b; t)| &\leq \\
&\leq \left(53 \left| \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f''|} \right|^{\frac{1}{2}} \int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{4}} du + 12 \left| \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f''|} \right|^{\frac{1}{4}} \int_a^b |f''(u)|^{-\frac{1}{4}} du \right) t^{\frac{3}{2}} + \\
&+ 19 \left| \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f''|} \right|^{\frac{3}{4}} t^{\frac{3}{4}} \int_a^b |f''(u)|^{\frac{3}{8}} du + \frac{133}{\sqrt{\min_{[a,b]} |f''|}} t \left(\log t + \frac{1}{2} \log_+(r_{\max}) \right) + \\
&+ 12 (\min_{[a,b]} |f''|)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{t} + 6t,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

mit $\log_+ := \max(0, \log)$.

Sollte $Z \leq 1$ sein, dann ergibt sich mittels trivialer Abschätzung

$$\begin{aligned}
16|T(a, b; t)| &\leq \frac{8}{\sqrt{2}} ((b-a)t^2 + t) \\
&\leq \frac{8}{\sqrt{2}} 4\sqrt{5} 2^{\frac{1}{8}} \pi^{-\frac{1}{4}} \sqrt{(b-a)|f'(b) - f'(a)|} (\min_{[a,b]} |f''|)^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{3}{2}} + 6t \\
&\leq 42 \left| \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f''|} \right|^{\frac{1}{2}} \int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{4}} du + 6t.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Damit hat das obige Ergebnis (4.17) Allgemeingültigkeit.

Vollendung der Restabschätzung. Wir setzen bei (4.5) fort und schätzen die Summanden für $m = 0$ und $m \in]t-1, t]$ trivial ab. Ihr Beitrag zu $P^*(t)$ ist $\Theta \frac{3}{8} \sqrt{2} t$, daher gilt

$$A_{\mathcal{K}}(t) = \text{vol}(\mathcal{K})t^3 - 16 P^{**}(t) + \left(\left(\frac{1}{2} \pi (r_0 + M) + 6\sqrt{2} + 10 \right) t + 5 \right) \Theta,$$

$$P^{**}(t) := \sum_{0 < m \leq t-1} \left(\sum_{0 < n \leq \frac{t}{\sqrt{2}} f\left(\frac{m}{t}\right)} \psi \left(\sqrt{t^2 f^2 \left(\frac{m}{t} \right) - n^2} \right) \right). \tag{4.19}$$

Es bezeichne $z_0 \geq 0$ die kleinste Zahl, so daß f'' auf $[z_0, 1[$ monoton ist. Wir setzen weiters $c := \left(\frac{54}{53} \right)^2$ und definieren eine Folge $(z_j)_{1 \leq j \leq J}$ durch die Gleichung $|f''(z_j)| = c^j |f''(z_0)|$. Dabei sei J maximal, so daß $z_J t \leq t-1$, also $1 - z_J \geq t^{-1}$. Wegen $r_{\max}^{-1} c^J \leq |f''(z_J)| \leq 8^{3/4} \frac{r_{\max}^3}{r_{\min}^4} (1 - z_J)^{-3/2}$ (nach Hilfssatz 4) folgt mit kurzer Rechnung

$$J \leq \frac{3 \log t}{2 \log c} + C, \quad C := \frac{1}{\log c} \log \left(8^{3/4} \frac{r_{\max}^4}{r_{\min}^4} \right). \tag{4.20}$$

Nach unserer Konstruktion ist klarerweise

$$P^{**}(t) = T(0, z_0; t) + \sum_{j=0}^J T(z_j, z_{j+1}; t). \quad (4.21)$$

Wir schätzen zuerst $T(0, z_0; t)$ ab. Dazu sei $F_2 := \max_{[0, z_0[} |f''(z)|$ definiert. Wir verwenden (4.17) mit $a = 0, b = z_0$, sowie die Schranken $r_{\max}^{-1} \leq |f''(z)| \leq F_2$ und erhalten

$$\begin{aligned} 16|T(0, z_0; t)| &\leq \left(53 r_{\max}^{1/2} F_2^{3/4} + 12 r_{\max}^{1/2} F_2^{1/4} \right) t^{3/2} + 133 r_{\max}^{1/2} t \log t + \\ &+ (66.5 r_{\max}^{1/2} \log_+(r_{\max}) + 6) t + 19 r_{\max}^{3/4} F_2^{9/8} t^{3/4} + 12 r_{\max}^{1/4} t^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Zur Abschätzung von $T(z_j, z_{j+1}; t)$ wenden wir (4.17) mit $a = z_j, b = z_{j+1}$ an, dann ist $\frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f''|} = c$, $\min_{[a,b]} |f''| = c^j$, und mit Hilfssatz 4 ergibt sich

$$\begin{aligned} 16|T(z_j, z_{j+1}; t)| &\leq \\ &\leq \left(53 c^{1/2} \int_{z_j}^{z_{j+1}} |f''(w)|^{1/4} dw + 12 c^{1/4} r_{\max}^{1/4} (z_{j+1} - z_j) \right) t^{3/2} + \\ &+ 133 c^{-j/2} r_{\max}^{1/2} t \log t + \left(66.5 c^{-j/2} r_{\max}^{1/2} \log_+(r_{\max}) + 6 \right) t + \\ &+ 19 c^{3/4} t^{3/4} \int_{z_j}^{z_{j+1}} |f''(w)|^{3/8} dw + 12 r_{\max}^{1/4} c^{-j/4} t^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Beim Aufsummieren über $j = 0, 1, \dots, J$ beachten wir, daß

$$133 \sum_{j=0}^J c^{-j/2} < 7182 \quad \text{und} \quad 12 \sum_{j=0}^J c^{-j/4} < 1290$$

gilt, und erhalten

$$\begin{aligned} 16 \sum_{j=0}^J |T(z_j, z_{j+1}; t)| &\leq \\ &\leq \left(53 c^{1/2} \int_0^1 |f''(w)|^{1/4} dw + 12 c^{1/4} r_{\max}^{1/4} \right) t^{3/2} + \\ &+ 7182 r_{\max}^{1/2} t \log t + \left(3591 r_{\max}^{1/2} \log_+(r_{\max}) + 6(J+1) \right) t + \\ &+ 19 c^{3/4} t^{3/4} \int_0^1 |f''(w)|^{3/8} dw + 1290 r_{\max}^{1/4} t^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die auftretenden Integrale werden durch den maximalen Krümmungsradius abgeschätzt:
Mit $\beta = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f''(w)|^\beta dw &\leq \int_0^1 |f''(w)| \frac{r_{\max}^{1-\beta}}{(1+f'^2(w))^{3(1-\beta)/2}} dw = \\ &= r_{\max}^{1-\beta} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^{3(1-\beta)/2}} = r_{\max}^{1-\beta} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \frac{3}{2}\beta)}{2 \Gamma(\frac{3}{2}(1-\beta))} \approx \begin{cases} 1.35 r_{\max}^{3/4} & \text{für } \beta = \frac{1}{4}, \\ 1.725 r_{\max}^{5/8} & \text{für } \beta = \frac{3}{8}. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir müssen nur mehr die Resultate (4.19), (4.21), (4.22) und (4.24) zusammenfügen, für J die Schranke (4.20) sowie den Wert $c := \left(\frac{54}{53}\right)^2$ einsetzen und vereinfachen. Dies ergibt nach etwas mühsamer Rechnung (z.B. unterstützt von *Derive* [15]) die in Satz 3 dargestellte Abschätzung des Gitterrestes. \square

Bemerkung. Für den Spezialfall der Kugel ergibt Satz 3 (wegen $F_2 = 0$, $r_{\max} = 1$) als größten Fehlerterm $86 t^{3/2}$. Dies ist natürlich etwas schwächer als $14 t^{3/2}$ von Satz 1A, aber es zeigt, daß die wesentlich verschiedene und viel allgemeinere Beweismethode des Satzes 3 bezüglich der Schärfe in etwa derselben Größenordnung bleibt.

Literatur

- [1] V. Bentkus and F. Götze, On the lattice point problem for ellipsoids. *Acta Arithm.* **80**, 101–125 (1997).
- [2] S. Bochner, Die Poisson'sche Summenformel in mehreren Veränderlichen. *Math. Ann.* **106**, 56–63 (1932).
- [3] F. Chamizo, Lattice points in bodies of revolution. *Acta Arith.* **85**, 265–277 (1998).
- [4] F. Chamizo and H. Iwaniec, On the sphere problem. *Rev. Mat. Iberoamericana* **11**, 417–429 (1995).
- [5] F. Fricker, Einführung in die Gitterpunktlehre. Basel-Boston-Stuttgart 1982.
- [6] F. Götze, Lattice point problems and values of quadratic forms, Preprint, Univ. Bielefeld 2004.
- [7] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of integrals, series, and products. A. Jeffrey editor. 5th ed., San Diego 1994.
- [8] D.R. Heath-Brown, Lattice points in the sphere. In: Number theory in progress, Proc. Number Theory Conf. Zakopane 1997, eds. K. Györy et al., vol. **2**, 883–892 (1999).
- [9] E. Hlawka, Über Integrale auf konvexen Körpern I. *Monatsh. f. Math.* **54**, 1–36 (1950); II, *ibid.* **54**, 81–99 (1950).
- [10] M. Huxley, Exponential sums and lattice points III. *Proc. London Math. Soc.*, III. Ser., **87** (2003), 591–609.
- [11] E. Krätzel, Lattice points. Berlin 1988.
- [12] E. Krätzel, Analytische Funktionen in der Zahlentheorie. Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden 2000.
- [13] E. Krätzel, Lattice points in convex planar domains. *Monatsh. Math.*, im Druck.
- [14] W. Müller, Lattice points in large convex bodies. *Monatsh. Math.* **128**, 315–330 (1999).

- [15] Soft Warehouse, Inc., *Derive*, Version 3.11, Honolulu (Hawaii) 1995.
- [16] J.G. Van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendungen auf Gitterpunktprobleme. *Math.Z.* **17**, 250–259 (1923).
- [17] I.M. Vinogradov, On the number of integer points in a sphere (Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **27**, 957–968 (1963).
- [18] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*. Berlin 1963.

Ekkehard Krätzel
 Institut für Mathematik
 Universität Wien
 Nordbergstraße 15
 1090 Wien, Österreich
<http://www.univie.ac.at/~baxa/kraetzel.html>

Werner Georg Nowak
 Institut für Mathematik
 Department für Integrative Biologie
 Universität für Bodenkultur Wien
 Peter Jordan-Straße 82
 1190 Wien, Österreich
 E-mail: nowak@mail.boku.ac.at
<http://www.boku.ac.at/math/nth.html>